

Jean Gonzalez Silva

**Modelagem Física de Sistemas Mecânicos e  
Estimação de Parâmetros no Domínio da  
Frequência via Problema Inverso**

Macaé, RJ, Brasil

2016



Jean Gonzalez Silva

**Modelagem Física de Sistemas Mecânicos e Estimação  
de Parâmetros no Domínio da Frequência via Problema  
Inverso**

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio de Janeiro Campus Macaé, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Campus UFRJ - Macaé

Programa de Graduação

Orientador: Jorge de Oliveira Brandão

Coorientador: Roberto Mamud Guedes da Silva

Macaé, RJ, Brasil

2016

Jean Gonzalez Silva

Modelagem Física de Sistemas Mecânicos e Estimação de Parâmetros no Domínio da Frequência via Problema Inverso/ Jean Gonzalez Silva. – Macaé, RJ, Brasil, 2016-68 p. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Jorge de Oliveira Brandão

Coorientador: Roberto Mamud Guedes da Silva

Monografia (Graduação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Campus UFRJ - Macaé

Programa de Graduação, 2016.

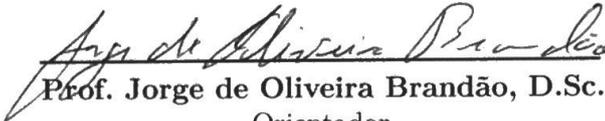
1. Modelagem. 2. Dinâmica. 3. Problema inverso. 4. Estimação I. Jorge de Oliveira Brandão. II. Roberto Mamud Guedes da Silva. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro IV. Campus UFRJ - Macaé. V. Engenharia Mecânica

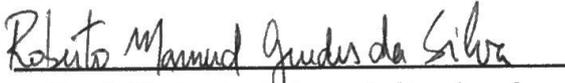
Jean Gonzalez Silva

## **Modelagem Física de Sistemas Mecânicos e Estimação de Parâmetros no Domínio da Frequência via Problema Inverso**

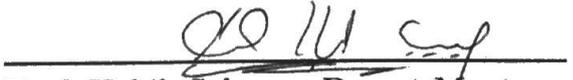
Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio de Janeiro Campus Macaé, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Trabalho aprovado. Macaé, RJ, Brasil, 15 de dezembro de 2016:

  
Prof. Jorge de Oliveira Brandão, D.Sc.  
Orientador

  
Prof. Roberto Mamud Guedes da  
Silva, D.Sc.  
Coorientador

  
Prof. Raquel Jahara Lobosco, D.Sc.

  
Prof. Habib Salomon Dumet Montoya,  
D.Sc.

  
Carlos Eduardo Marçal Campanholi,  
B.Sc.

Macaé, RJ, Brasil

2016



*Dedicatória:*

*Este trabalho é dedicado à todos que me proporcionaram força e determinação durante todo esse percurso.*



# Agradecimentos

Os agradecimentos principais são direcionados à minha família que sempre me apoiou e esteve ao meu lado, e a todos que fizeram parte dessa minha caminhada fazendo com que este trabalho fosse possível.

Agradecimentos especiais são direcionados para os Professores Jorge de Oliveira Brandão e Roberto Mamud Guedes da Silva que se dedicaram de forma atenciosa para a elaboração deste trabalho, aos professores da banca, além dos professores com que tive a oportunidade de crescer profissionalmente e pessoalmente junto a instituição *UFRJ-Macaé*<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Universidade Federal do Rio de Janeiro Campus Macaé



*“Uma máquina pode fazer o trabalho de cinquenta pessoas comuns.  
Máquina alguma pode fazer o trabalho de um homem incomum.”  
Elbert Hubbard, editor americano (1865-1915).*



# Resumo

O presente trabalho consiste na obtenção de modelos matemáticos que descrevem adequadamente o comportamento dinâmico de sistemas mecânicos translacionais. Através desta modelagem adequada, foram realizadas simulações numéricas de medições das razões das amplitudes de saída e entrada, em função da frequência, de um sistema mecânico massa-mola amortecido, considerando erros de medição. Através dos dados gerados, que simulam um conjunto de medidas experimentais, foram estimados os parâmetros deste sistema.

**Palavras-chave:** Sistema mecânico. Dinâmica. Problema inverso. Estimação.



# Abstract

This work consists of obtaining mathematical models that properly describe the dynamical behavior of translational mechanical systems. In addition, numerical simulations of the amplitude ratio of the output and input measurements, as function of frequency, in a mass-spring damped system were performed by introducing measurement errors. Through these generated data, that simulate a set of experimental measures, the parameters of this system were estimated.

**Keywords:** Mechanical systems. Dynamics. Inverse problem. Estimation.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Sistema Mecânico . . . . .	35
Figura 2 – Magnitude e fase da FRF . . . . .	39
Figura 3 – Parâmetros estimados do caso 1 para $N=10$ . . . . .	43
Figura 4 – Exemplo 1 do caso 1 para $N=10$ . . . . .	44
Figura 5 – Exemplo 2 do caso 1 para $N=10$ . . . . .	44
Figura 6 – Todas as funções estimadas do caso 1 para $N=10$ . . . . .	45
Figura 7 – Parâmetros estimados no caso 1 para $N=100$ . . . . .	45
Figura 8 – Exemplo 1 do caso 1 para $N=100$ . . . . .	46
Figura 9 – Exemplo 2 do caso 1 para $N=100$ . . . . .	47
Figura 10 – Todas as funções estimadas do caso 1 para $N=100$ . . . . .	47
Figura 11 – Parâmetros estimados no caso 2 para $N=10$ . . . . .	48
Figura 12 – Todas as funções estimadas do caso 2 para $N=10$ . . . . .	48
Figura 13 – Função e dados do valor atípico do caso 2 para $N=10$ . . . . .	49
Figura 14 – Parâmetros estimados no caso 3 para $N=10$ . . . . .	49
Figura 15 – Todas as funções estimadas do caso 3 para $N=10$ . . . . .	50
Figura 16 – Parâmetros estimados no caso 4 para $N=10$ . . . . .	50
Figura 17 – Todas as funções estimadas do caso 4 para $N=10$ . . . . .	51
Figura 18 – Função e dados do valor atípico do caso 4 para $N=10$ . . . . .	51
Figura 19 – Exemplo do caso 2 para $N=10$ com concentração . . . . .	52
Figura 20 – Todas as funções estimadas do caso 2 para $N=10$ com dados concentrados . . . . .	52
Figura 21 – Estimativas do caso 1 com $N=10$ e $N=100$ . . . . .	53
Figura 22 – Módulos das FRF para os casos 1, 2, 3 e 4 em função da frequência . . . . .	54
Figura 23 – Estimativas dos parâmetros dos casos 1, 2, 3 e 4 com $N=10$ . . . . .	55



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Sistema de segunda ordem . . . . .	33
Tabela 2 – Parâmetros analisados . . . . .	39
Tabela 3 – Parâmetros de referência . . . . .	41
Tabela 4 – Parâmetros estimados do caso 1 com $N=10$ . . . . .	43
Tabela 5 – Parâmetros estimados do caso 1 com $N=100$ . . . . .	46
Tabela 6 – Coeficientes de variação . . . . .	54



# Lista de símbolos

$t$	Tempo
$m$	Massa
$k$	Coefficiente elástico
$c$	Coefficiente de amortecimento
$j$	Número imaginário
$\omega$	Frequência
$\nu$	Variável aleatória
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Vetores unitários
$\mathbf{F}$	Vetor força resultante
$\mathbf{r}$	Vetor posição
$\mathbf{v}$	Vetor velocidade
$\mathbf{a}$	Vetor aceleração
$\mathbf{p}$	Vetor momento linear
$\boldsymbol{\theta}$	Vetor de parâmetros
$\hat{\boldsymbol{\theta}}$	Vetor de parâmetros estimados



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>23</b>
1.1	Objetivo	24
1.2	Organização	24
<b>2</b>	<b>MODELAGEM DINÂMICA</b>	<b>25</b>
2.1	Abordagem Newtoniana	25
<b>3</b>	<b>A MODELAGEM NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA</b>	<b>29</b>
3.1	Domínio da frequência	29
3.2	Transformada de Laplace e Função Transferência	30
3.3	Estabilidade	31
3.4	Função Resposta em Frequência (FRF)	33
<b>4</b>	<b>PROBLEMA DE EXCITAÇÃO EM SISTEMA MECÂNICO</b>	<b>35</b>
4.1	Excitação de base	35
<b>5</b>	<b>PROBLEMA INVERSO DE ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO</b>	<b>41</b>
5.1	Geração de dados	41
5.2	Função Custo	42
5.3	Experimentos numéricos para estimação dos parâmetros	42
5.3.1	Caso 1 com $N=10$	43
5.3.2	Caso 1 com $N=100$	45
5.3.3	Caso 2 com $N=10$	48
5.3.4	Caso 3 com $N=10$	49
5.3.5	Caso 4 com $N=10$	50
5.3.6	Caso 2 com $N=10$ e dados concentrados	52
5.4	Discussão de resultados	53
5.4.1	Número de dados medidos	53
5.4.2	Parâmetros distintos	54
5.4.3	Concentração de dados em determinada região	55
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>57</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>59</b>

<b>ANEXOS</b>	<b>61</b>
<b>ANEXO A – ALGORITMO DE GERAÇÃO DE DADOS . . . . .</b>	<b>63</b>
<b>ANEXO B – ALGORITMO DE ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS</b>	<b>65</b>
<b>ANEXO C – ALGORITMO DE GERAÇÃO PARA OS DADOS CON- CENTRADOS NO PICO . . . . .</b>	<b>67</b>

# 1 Introdução

A física se fundamenta em observações experimentais e medidas quantitativas, na qual um número finito de leis fundamentais representa os fenômenos naturais (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2010, p. 3). Tais leis caracterizam o comportamento físico de sistemas tanto em estado de repouso (estática) quanto em movimento (dinâmica).

Os estudos dos movimentos de corpos iniciaram-se com Aristóteles (382-322AC), que modelaram a forma de pensamento da Idade Média. Na abertura de seu livro, Física III, Aristóteles menciona que a “Natureza é um princípio de movimento e de mudança e é objetivo de nossas indagações. Devemos portanto estar certos de que entendemos o que é o movimento, pois, se não sabemos isso, também não sabemos o que é a natureza” (CHERMAN, 2005, p. 22).

Os princípios da dinâmica se desenvolveram com a contribuição de Galileu Galilei (1564-1642) ao utilizar o método científico para elaborar as leis de queda de objetos. Com a medição do tempo, foi capaz de formular leis para o movimento dos corpos sob ação da gravidade obtendo equações de movimento de corpos em mesmas condições.

As representações de fenômenos naturais consideradas base da mecânica clássica são as leis de movimento definidas por Isaac Newton (1643-1727). Newton utilizou a análise entre o espaço e o tempo pelo cálculo diferencial e integral e definiu novos conceitos físicos, como o conceito de força, a fim de mensurar interações entre corpos distintos. Com a definição de referenciais inerciais, utilizou-se da estrutura vetorial e do princípio da superposição para análise de problemas. A primeira lei estabelece referenciais inerciais, onde o movimento dos corpos pode ser descrito em termos da segunda lei. A terceira lei postula o efeito de ação e reação, que garante a conservação dos momentos linear e angular total de um sistema isolado.

Posteriormente, foram desenvolvidas técnicas para sua aplicação por Euler, D’Alembert, Lagrange, Hamilton e outros. Assim, o comportamento de sistemas de maior complexidade pode ser determinado, de modo menos dispendioso comparado com o tratamento newtoniano.

Sistemas mecânicos massa-mola amortecidos tem sido estudados através de relações físicas constitutivas ideais abordados por diversos autores, na área da dinâmica de corpos, onde podemos citar, por exemplo, Timoshenko e Young (1948), Nussenzveig (2002), Inman (2014) e Marghitu e Dupac (2012). Em que, a partir da validação experimental destas relações, o modelo matemático proposto do sistema pode ser adotado para representação de seu comportamento.

## 1.1 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo a obtenção de modelos matemáticos adequados através da estimação de parâmetros das relações físicas pelo domínio da frequência.

Os modelos, fundamentados nas relações físicas entre seus elementos constituintes, são determinados a partir de considerações do sistema. As relações preestabelecidas então devem ser comprovadas por procedimento experimental. Assim, além da modelagem, analisa-se a adaptação entre sistemas reais e os seus correspondentes modelos.

O modelo para o sistema mecânico analisado neste trabalho possui suas relações físicas consideradas lineares e invariantes no tempo. Portanto, o ajuste entre o modelo e os dados reais é obtido pelo problema inverso de estimação de parâmetros. Por conseguinte, o estudo apresentado concentra-se na análise do processo de estimação de parâmetros.

A partir da determinação e validação do modelo matemático, o comportamento do sistema mecânico pode ser previsto e utilizado no controle e automação de sistemas dinâmicos, amplamente utilizado em diversas áreas da engenharia, por exemplo, geração e distribuição de energia, sistemas de proteção e segurança, transporte, telecomunicações, processos de manufatura e em diversos setores na sociedade contemporânea.

## 1.2 Organização

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2, apresentam-se a modelagem dinâmica de partículas e corpos rígidos concebidos por leis de movimento da mecânica clássica de Newton.

No capítulo 3, desenvolvem-se as etapas e considerações para a elaboração da função de resposta em frequência utilizada na estimação de parâmetros do modelo.

No capítulo 4, encontra-se o modelo do sistema físico de um corpo sobre excitação em sua base e sua correspondente função de resposta em frequência.

No capítulo 5, analisa-se o processo de estimação de parâmetros pelo problema inverso, a partir de dados gerados pela solução do problema direto, abordado no capítulo anterior.

Por fim, no capítulo 6 apresenta-se a conclusão com os respectivos resultados, bem como possibilidades para trabalhos futuros.

## 2 Modelagem Dinâmica

Este trabalho é baseado na modelagem clássica de Newton, a qual pelas relações físicas modelam o movimento dos corpos em equações diferenciais de sistemas lineares invariantes no tempo (LTI).

### 2.1 Abordagem Newtoniana

As equações de Newton descrevem o estado dinâmico de partículas e corpos rígidos por meio de um balanço de forças e torques, onde os corpos ou partículas são individualmente analisados.

O estudo da mecânica newtoniana se divide entre a cinemática e a dinâmica. A cinemática é composta pela análise geométrica do movimento em relação a determinado referencial, na qual as posições, velocidades e acelerações dos corpos são determinadas vetorialmente. No espaço físico de três dimensões, suas trajetórias podem ser descritas utilizando três coordenadas referenciais a três vetores unitários. Por outro lado, a dinâmica é composta pela determinação das forças que agem sob os corpos. Neste último estudo, analisam-se as forças aplicadas e as forças resultantes de reação nos corpos, sendo definidas como forças externas e internas respectivamente.

A primeira lei de Newton, em um determinado referencial, diz que todo corpo mantém-se em estado de repouso ou em movimento uniforme em linha reta com velocidade constante a menos que uma força externa aja sobre ele. Assim, esta lei define a força como uma ação que tende a mudar o estado dinâmico de um corpo.

Para compreender o comportamento de um corpo por ação de uma força é preciso definir a cinemática do movimento. Esta é composta pela posição do corpo no espaço físico de três dimensões e suas derivadas. As mesmas podem ser determinadas em um sistema de coordenadas em  $\mathbb{R}^3$ , formado por três vetores unitários perpendiculares entre si,  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ , e coordenadas expressas por funções escalares  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ . Deste modo, a localização do corpo, pode ser descrita pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3. \quad (2.1)$$

Com sua primeira derivada no tempo, temos seu vetor velocidade definido por  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  e sua segunda derivada no tempo seu vetor aceleração definido por  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ .

O vetor momento linear ou momento de translação  $\mathbf{p}$  é definido como o produto entre o vetor velocidade e a massa  $m$  do corpo

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (2.2)$$

onde este é conservado em estado de repouso ou movimento uniforme em linha reta com velocidade constante.

A segunda lei de Newton para o movimento diz que em um referencial estacionário, a variação do momento no tempo de um corpo é igual a força de ação sob ele. Assim, define-se a força em forma vetorial como

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (2.3)$$

Logo, tem-se que a segunda lei relaciona o movimento do corpo (força inercial) pelo estudo da cinemática, e a sua causa (forças que agem sob o corpo) pelo estudo da dinâmica. A lei de movimento para um corpo com massa constante  $m$  se simplifica em

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$ . Deste modo, a equação (2.4) implica que o vetor força resultante  $\mathbf{F}$  e o vetor aceleração  $\mathbf{a}$  possuem a mesma direção e sentido.

A terceira lei de Newton diz que quando um corpo exerce uma força em outro, este exerce também uma força de igual intensidade e sentido oposto à primeira (força de reação). Em mecanismos newtonianos, as forças agindo no sistema de corpos podem ser divididas em forças internas e externas. Forças internas agem entre os corpos do sistema, e forças externas agem por fontes externas ao sistema. A força resultante  $\mathbf{F}$  em um corpo é a soma de todas as forças externas e internas que agem sob ele

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_{ext_i} + \sum_j \mathbf{F}_{int_j}. \quad (2.5)$$

Logo, temos

$$\sum_i \mathbf{F}_{ext_i} + \sum_j \mathbf{F}_{int_j} = m\ddot{\mathbf{r}}, \quad (2.6)$$

observe que o lado esquerdo da igualdade acima é relativo a dinâmica do corpo, e o lado direito é relativo a cinemática do movimento do corpo.

De uma forma mais geral, a força resultante  $\mathbf{F}$  atuando sob um corpo pode ter dependência do tipo

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t), \quad (2.7)$$

onde se estabelecem as relações entre os vetores de força, de posição e velocidade.

Por exemplo, no domínio da mecânica translacional, as forças para molas e amortecedores ideais são representadas pelas seguintes relações lineares

$$\mathbf{F}_k = -k\mathbf{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_c = -c\dot{\mathbf{r}}. \quad (2.8)$$

Desta forma, a equação de movimento representada para este sistema corresponde a uma equação vetorial diferencial de segunda ordem para cada corpo

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t). \quad (2.9)$$



## 3 A modelagem no domínio da frequência

Neste capítulo é desenvolvido a representação do modelo do sistema no domínio da frequência. Primeiramente, discute-se a estimação dos parâmetros pelo domínio da frequência na seção 3.1. Em seguida, para analisar o comportamento dinâmico de um sistema no domínio da frequência, utiliza-se transformadas integrais. Então, define-se na seção 3.2 a transformada de Laplace e a função de transferência do sistema.

Além disso, na seção 3.3, discute-se a estabilidade de sistemas LTI para a análise no domínio da frequência. E finalizando, na seção 3.4, a função resposta em frequência (FRF) é definida, representando o comportamento do sistema no domínio da frequência.

### 3.1 Domínio da frequência

Sistemas dinâmicos podem ser representados diretamente por leis físicas. Através delas, constrói-se um modelo matemático que determina o comportamento dinâmico do sistema devido às ações externas, segundo o capítulo 2. A partir da resposta do comportamento do sistema devido a uma conhecida excitação é possível a estimação dos parâmetros do modelo dinâmico por uma análise inversa. Para esta, a estimação dos parâmetros do modelo pode ser realizada por meio de experimentos nos domínios do tempo e/ou da frequência.

No domínio do tempo, as funções matemáticas que descrevem a dinâmica dos sistemas relacionam uma entrada e sua resposta em função do tempo. Para a estimação dos parâmetros destas funções, as respostas são ajustadas às medidas obtidas do sistema real pela aplicação de um sinal de entrada específico (pulso, degrau, etc).

No domínio da frequência, as funções matemáticas que descrevem a dinâmica dos sistemas relacionam entradas às respostas em função da frequência. Para a estimação dos parâmetros, as funções são ajustadas pelas medidas de diferentes entradas e suas respostas.

Ambas as formas de estimação apresentam resultados eficientes, entretanto observa-se vantagens do procedimento no domínio da frequência, como:

- Redução do volume de dados: grande quantidades de medidas no domínio do tempo são substituídas por poucas linhas espectrais em frequência;
- Facilidade na medição: as medidas são realizadas em regime permanente.
- Facilidade na redução do ruído: as frequências do ruído diferem das frequências excitadas na entrada do sistema, o que permite distinguí-lo e reduzir o seu efeito na

saída do sistema;

## 3.2 Transformada de Laplace e Função Transferência

Sistemas dinâmicos LTI podem ser descritos facilmente por uma função de transferência, através da aplicação da transformada de Laplace.

Segundo [Boyce e DiPrima \(2010, p. 241\)](#), a transformada de Laplace de uma função  $x(t)$  definida para  $t \geq 0$  é um operador linear obtido por

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad (3.1)$$

sendo que a função  $x(t)$  deve satisfazer as seguintes condições:

- $x(t)$  seja seccionalmente contínua no intervalo  $0 \leq t \leq A$  para qualquer  $A$  positivo.
- $|x(t)| \leq Ke^{at}$  quando  $t \geq M$ , onde  $K, a$  e  $M$  são constantes reais com  $K$  e  $M$  necessariamente positivas.

Desta forma, a transformada  $X(s)$  existe para todo  $\text{Re}(s) > a$ .

Um dos benefícios em utilizar de transformadas de Laplace é que o processo de resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs) é simplificado para um problema algébrico, como bem descrito por [Kreyszig \(2011, p. 203\)](#).

Ao aplicar a transformada de Laplace nas EDOs de sistemas LTI, são realizadas manipulações algébricas, para a obtenção da função de transferência da planta do sistema,  $H(s)$ . A função de transferência é uma conveniente representação da relação entre a entrada e saída de sistemas LTI.

Para a simplificação do estudo, as condições iniciais do sistema são assumidas como nulas, no entanto essa limitação não é um problema. Segundo o princípio de Duhamel (princípio de superposição), as equações que possuem condições iniciais não nulas podem ser divididas em dois problemas. Em um problema consideramos a equação diferencial não homogênea com as condições iniciais nulas e no outro problema consideramos a equação diferencial homogênea com as condições iniciais não nulas. E sua resposta às condições iniciais será a soma das respostas dos dois problemas.

A propriedade da Transformada de Laplace que relacionada com as derivadas de funções, admitindo então as condições iniciais nulas, é

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s), \quad (3.2)$$

em que  $f^{(n)}(t)$  é a derivada de ordem  $n$  da função  $f(t)$ .

Em caso específico, adota-se uma função de entrada  $u(t)$  no domínio de tempo expressada pela função transformada

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}, \quad (3.3)$$

enquanto que a função de saída ou resposta  $x(t)$  pode ser expressa também como sua função transformada

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}. \quad (3.4)$$

Assim, é definida a função de transferência como

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)}, \quad (3.5)$$

a qual relaciona a função de entrada e saída do sistema.

A função transferência assume a forma de função racional

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (3.6)$$

sendo  $a_n \cdot b_m \neq 0$ ,  $b_i$  e  $a_i$  constantes, e  $m$  e  $n$  números naturais, em que  $m < n$ . De forma equivalente podemos expressar os polinômios  $N(s)$  e  $D(s)$  em função das suas raízes

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \kappa \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)}, \quad (3.7)$$

em que  $\kappa = b_m/a_n$  é uma constante. As raízes do numerador ( $z_1, z_2, \dots, z_m$ ) e do denominador ( $p_1, p_2, \dots, p_n$ ) são chamadas de zeros e polos, respectivamente.

Para exemplificação, considere a equação de segunda ordem de um modelo de sistema LTI

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = u(t), \quad (3.8)$$

na qual  $u(t)$  é uma excitação externa do sistema. Aplicando a transformada de Laplace e admitindo as condições iniciais nulas, temos

$$\begin{aligned} U(s) &= ms^2 X(s) + csX(s) + kX(s) \\ &= X(s)(ms^2 + cs + k), \end{aligned}$$

de modo que obtemos a função de transferência de equação

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}. \quad (3.9)$$

### 3.3 Estabilidade

A estabilidade é associada à ideia de permanência em um determinado estado, seja em repouso ou em oscilação constante.

No caso em que os sistemas são excitados por uma fonte externa, a estabilidade implica que somente a resposta causada pela excitação permanece, enquanto a resposta natural tende a zero.

A resposta do sistema no domínio do tempo a uma excitação  $u(t)$  é obtida aplicando a transformada de Laplace inversa da equação (3.5), assim

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\},$$

onde para sua resolução é aplicada a expansão em frações parciais de  $H(s)U(s)$ .

A resposta natural do sistema é obtida pela transformada inversa dos termos que apresentam os monômios com os polos de  $H(s)$  em seu denominador.

Com a transformada de Laplace inversa do tipo

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s-p)}\right\} = Ke^{pt},$$

em que  $K$  é uma constante e  $p$  um possível pólo de  $H(s)$ . Nota-se que se  $p < 0$ , então a transformada inversa terá um decaimento exponencial e, então, estes termos tenderão a zero quando o tempo tender a infinito.

No entanto, os denominadores  $D(s)$ , conhecidos com polinômios característicos, podem apresentar não só polos reais e distintos, como polos reais repetidos, e polos complexos conjugados. Se os polos da função de transferência tiverem suas partes reais negativas, a resposta natural do sistema para tais casos continuará apresentando decaimentos exponenciais.

O polinômio característico de segunda ordem representado na equação (3.9), como exemplificação, pode ser escrito como

$$D(s) = s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = s^2 + bs + a,$$

no qual  $a$  e  $b$  são parâmetros positivos, e seus dois polos são encontrados por

$$p_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}.$$

Para os polos obtidos apresentam-se três circunstâncias distintas, apresentadas na Tabela 1, assim como a transformada de Laplace inversa dos termos que apresentam os monômios formados pelos polos da função de transferência  $H(s)$ .

Para os três casos representados, observa-se que para  $a$  e  $b$  positivos as partes reais dos polos da função de transferência são sempre negativas, tendo assim um decaimento exponencial na sua resposta, o que garante a estabilidade deste sistema.

Tabela 1 – Sistema de segunda ordem

Caso	Polos	Termo em $s$	Laplace inversa
$b^2 < 4a$	$p_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{a - \frac{b^2}{4}}j$	$\frac{K}{\left(s + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{b^2}{4}\right)}$	$\frac{K}{\left(a - \frac{b^2}{4}\right)} e^{-\frac{b}{2}t} \text{sen}\left[\left(a - \frac{b^2}{4}\right)t\right]$
$b^2 = 4a$	$p_{1,2} = -\frac{b}{2}$	$\frac{K}{\left(s + \frac{b}{2}\right)^2}$	$Kte^{-\frac{b}{2}t}$
$b^2 > 4a$	$p_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$	$\frac{K}{(s - s_1)(s - s_2)}$	$\frac{K}{(s_1 - s_2)}(e^{s_1t} - e^{s_2t})$

### 3.4 Função Resposta em Frequência (FRF)

Em sistemas LTI, a FRF representa sua dinâmica pelo ganho na amplitude e sua diferença de fase da sua resposta devido a um sinal de entrada.

Na FRF, a variável  $s$  da função de transferência apresentada nas seções anteriores assume um valor complexo, como mostraremos a seguir. Se o valor de  $s$  é restrito ao longo do eixo imaginário do plano complexo (isto é se  $s = j\omega$ ), a função de transferência se torna a FRF do sistema,  $H(j\omega)$ .

Neste trabalho, para realizar o estudo no domínio de frequência assume-se um sinal de entrada na forma,  $u(t) = u_0 \text{sen}(\omega t)$ , cujo a transformada de Laplace é.

$$U(s) = \frac{u_0\omega}{s^2 + \omega^2},$$

então pela função de transferência, equação (3.5), tem-se

$$X(s) = H(s) \frac{u_0\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Utilizando expansão em frações parciais,

$$X(s) = \frac{A}{s + j\omega} + \frac{B}{s - j\omega} + \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n}, \quad (3.10)$$

em que  $p_i$  são os polos de  $H(s)$ , sendo distintos de  $\pm j\omega$ . Para obter A, aplica-se

$$A = \lim_{s \rightarrow -j\omega} \left[ \frac{(s + j\omega)u_0\omega H(s)}{s^2 + \omega^2} - \frac{B(s + j\omega)}{s - j\omega} - \frac{C_1(s + j\omega)}{s - p_1} - \frac{C_2(s + j\omega)}{s - p_2} - \dots - \frac{C_n(s + j\omega)}{s - p_n} \right],$$

$$A = \frac{H(-j\omega)u_0\omega}{-2j\omega},$$

na qual o  $H(-j\omega)$  pode ser escrito na forma polar<sup>1</sup>, logo

$$A = \frac{u_0|H(j\omega)|e^{-j\theta}}{(-2j)}, \quad (3.11)$$

<sup>1</sup> Todo número complexo  $Z = a + bj$ , pode ser representado por  $Z = |Z|e^{j\angle Z}$ ,

em que  $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $\angle Z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ . Se  $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$ ,  $|Z| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$  e  $\angle Z = \angle Z_1 - \angle Z_2$ .

em que  $\theta = \angle H(j\omega)$ . De modo análogo, obtém-se

$$B = \lim_{s \rightarrow j\omega} \frac{[(s - j\omega)u_0\omega H(s)]}{(s^2 + \omega^2)} = \frac{u_0|H(j\omega)|e^{j\theta}}{2j}. \quad (3.12)$$

Substituindo as equações (3.11) e (3.12) na equação (3.10), tem-se

$$X(s) = \frac{u_0|H(j\omega)|}{2j} \left[ \frac{-e^{-j\theta}}{s + j\omega} + \frac{e^{j\theta}}{s - j\omega} \right] + \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n}.$$

Para o modelo do sistema  $H(s)$  estável, isto é, as partes reais dos polos negativas, ao aplicar a transformada de Laplace inversa, a solução assume a forma de

$$x(t) = x_e(t) + x_t(t),$$

em que  $x_e(t)$  é a solução estável dada por

$$x_e(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{u_0|H(j\omega)|}{2j} \left[ \frac{-e^{-j\theta}}{s + j\omega} + \frac{e^{j\theta}}{s - j\omega} \right] \right\}$$

e  $x_a(t)$  é a solução assintótica

$$x_a(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_N}{s - p_n} \right\}.$$

Logo, tem-se

$$x(t) = \frac{u_0|H(j\omega)|}{2j} [-e^{-j\theta}e^{-j\omega t} + e^{j\theta}e^{j\omega t}] + x_a(t),$$

onde os termos da solução assintótica  $x_a(t)$  decaem exponencialmente para zero. Logo, considera-se a solução estacionária  $x_e(t)$  como a solução do sistema, em que

$$x_e(t) = u_0|H(j\omega)| \frac{-e^{-j\theta}e^{-j\omega t} + e^{j\theta}e^{j\omega t}}{2j},$$

$$x_e(t) = u_0|H(j\omega)| \sin(\omega t + \theta).$$

A razão entre a amplitude da resposta e amplitude da entrada  $AR$  é função dada por

$$AR(\omega) = \frac{u_0|H(j\omega)|}{u_0} = |H(j\omega)|.$$

Então, para sistemas LTI estáveis, a razão entre as amplitudes equivale ao módulo da FRF, assim como o argumento da FRF equivale a diferença de fase.

## 4 Problema de excitação em sistema mecânico

Neste capítulo estudaremos a modelagem dinâmica de um sistema mecânico exposto a uma excitação externa. A modelagem utilizada possui relações físicas representadas por elementos ideais descrevendo sua dinâmica por equações matemáticas. Com as equações que modelam o movimento, então, obtém-se sua função resposta em frequência correspondente, a qual permite a análise no domínio da frequência.

### 4.1 Excitação de base

O sistema mecânico escolhido para a modelagem é constituído por um corpo de massa  $m$  e uma mola. Considera-se a mola representada por um sistema mola-amortecedor que é composto por um elemento de mola ideal e um elemento de amortecedor ideal em paralelo, mostrado na Figura 1. A representação da mola pelo sistema mola-amortecedor é devido à sua capacidade de armazenamento e dissipação de energia, caracterizada por seu material constituinte.

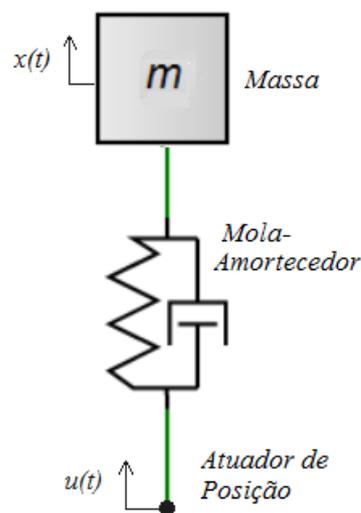


Figura 1 – Sistema Mecânico

A excitação da base da mola é definida pela posição  $u(t)$  conhecida e a posição do corpo definida por  $x(t)$ . Para o instante inicial considera-se o corpo  $m$  em estado de equilíbrio estático, em que podemos negligenciar a força da gravidade no sistema balanceada pela deflexão estática.

Pela abordagem de Newton, descrita no Capítulo 2, a cinemática é dada pela análise geométrica do movimento em relação a um sistema de coordenadas determinado pelos vetores unitários,  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , e  $\mathbf{e}_3$ , na qual para o caso unidimensional temos a posição, a velocidade e a aceleração da massa  $m$  determinados respectivamente por  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{a}(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{e}_2$ . A dinâmica é descrita pelas forças que agem no corpo de massa  $m$  causadas pela sua excitação, sendo compostas pela força da mola

$$\mathbf{F}_k(t) = -k[x(t) - u(t)]\mathbf{e}_2, \quad (4.1)$$

e a força do amortecedor

$$\mathbf{F}_c(t) = -c[\dot{x}(t) - \dot{u}(t)]\mathbf{e}_2. \quad (4.2)$$

A equação vetorial de movimento do corpo  $m$  é obtida substituindo as equações (4.1) e (4.2) na equação (2.6), isto é

$$\mathbf{F}_k(t) + \mathbf{F}_c(t) = m\mathbf{a},$$

substituindo os vetores  $\mathbf{F}_k$ ,  $\mathbf{F}_c$  e  $\mathbf{a}$ , temos que, em módulo,

$$-k(x(t) - u(t)) - c(\dot{x}(t) - \dot{u}(t)) = m\ddot{x}(t),$$

e reorganizando os termos escreve-se a equação de movimento como

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = c\dot{u}(t) + ku(t). \quad (4.3)$$

A equação de segunda ordem acima pode ser escrita em duas equações de primeira ordem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ m\dot{v}(t) = -k(x(t) - u(t)) - c(v(t) - \dot{u}(t)), \end{cases} \quad (4.4)$$

em que define-se  $x$  e  $v$  como variáveis de estado.

As equações diferenciais de primeira ordem são definidas como equações do espaço de estado, em que o sistema de equações diferenciais permite uma generalização para sistemas de maior complexidade, por exemplo, com  $n$  corpos.

O sistema de equações do espaço de estado é dado em notação matricial por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (4.5)$$

em que, neste caso, os vetores  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{u}(t)$  são

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix},$$

e as matrizes  $A$  e  $B$ , de coeficientes constantes, são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & \frac{c}{m} \end{bmatrix},$$

então, temos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & \frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Aplicando a transformada de Laplace em cada componente na equação (4.5), obtém-se

$$sI\mathbf{X}(s) = A\mathbf{X}(s) + B\mathbf{U}(s),$$

ou equivalentemente

$$(sI - A)\mathbf{X}(s) = B\mathbf{U}(s),$$

em que

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{c}{m} \end{bmatrix}.$$

Isolando  $\mathbf{X}(s)$  temos

$$\mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1}B\mathbf{U}(s), \quad (4.7)$$

em que

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{c}{m}}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} & \frac{1}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} \\ \frac{-\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} & \frac{s}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} \end{bmatrix}.$$

Observa-se que o determinante de  $(sI - A)$  é polinômio característico do sistema. Neste caso, temos uma equação de segundo grau como na seção 3.3, sendo assim comprovada sua estabilidade para os parâmetros positivos.

A partir da equação (4.7), tem-se

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{c}{m}}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} & \frac{1}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} \\ \frac{-\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} & \frac{s}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & \frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ sU(s) \end{bmatrix},$$

sendo escrita como

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{c}{m}}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} & \frac{1}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} \\ -\frac{k}{m} & \frac{s}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k+cs}{m} \end{bmatrix} U(s),$$

A função de interesse  $X(s)$  é determinada por

$$\begin{aligned} X(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{c}{m}}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} & \frac{1}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} \\ -\frac{k}{m} & \frac{s}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k+cs}{m} \end{bmatrix} U(s) \\ &= \frac{(\frac{c}{m}s + \frac{k}{m})}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} U(s). \end{aligned}$$

A função de transferência do sistema dinâmico, segundo a equação (3.5), é

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{(\frac{c}{m}s + \frac{k}{m})}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}. \quad (4.8)$$

E a FRF do sistema é obtida pela função de transferência avaliada em  $s = j\omega$  (seção 3.4)

$$H(j\omega) = \frac{\frac{k}{m} + \frac{c}{m}j\omega}{\frac{k}{m} - \omega^2 + \frac{c}{m}j\omega}. \quad (4.9)$$

Para analisar o comportamento do modelo, os parâmetros foram preestabelecidos em quatro casos distintos. Neste trabalho, o parâmetro de massa  $m$  é fixo em 10 kg em todos os casos, e os parâmetros dos coeficientes de rigidez e amortecimento da mola são apresentados na Tabela 2 para cada caso. Os valores do coeficiente de rigidez foram obtidos de exemplos do livro de (NORTON, 2014). E para os coeficiente de amortecimento dos casos 1 e 2 foram estipulados pelas *razões de amortecimento*<sup>1</sup> de 0,1 e 0,05, respectivamente, também utilizados para os casos 3 e 4, sendo suas razões de amortecimento aproximadamente de 0,167 e 0,084, respectivamente (INMAN, 2014).

Considerando a massa  $m$  fixa e conhecida, os parâmetros constantes  $k$  e  $c$  podem ser representados por dois parâmetros  $a$  e  $b$ , sendo  $a = \frac{k}{m}$  e  $b = \frac{c}{m}$ . Assim, a equação

<sup>1</sup> Razão de amortecimento definida como  $\xi = \frac{c}{2m\omega_n}$ , em que  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Tabela 2 – Parâmetros analisados

	Coef. de rigidez da mola [ $N/m$ ]	Coef. de amortecimento [ $Ns/m$ ]
Caso 1	12.258,88	70,02
Caso 2	12.258,88	35,01
Caso 3	4.378,17	70,02
Caso 4	4.378,17	35,01

(4.9) torna-se

$$H(j\omega) = \frac{a + bj\omega}{a - \omega^2 + bj\omega} \quad (4.10)$$

em forma polar

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{b^2\omega^2 + a^2}}{\sqrt{(a - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}, \quad (4.11)$$

e

$$\angle H(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{b\omega}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{b\omega}{a - \omega^2}\right). \quad (4.12)$$

As FRFs do modelo com os conjuntos distintos de parâmetros preestabelecidos de cada caso são representadas graficamente na Figura 2, onde são descritas através de seu módulo (magnitude)  $|H(j\omega)|$ , em decibéis, e de seu argumento (fase)  $\angle H(j\omega)$ , em graus, para cada conjunto de parâmetros.

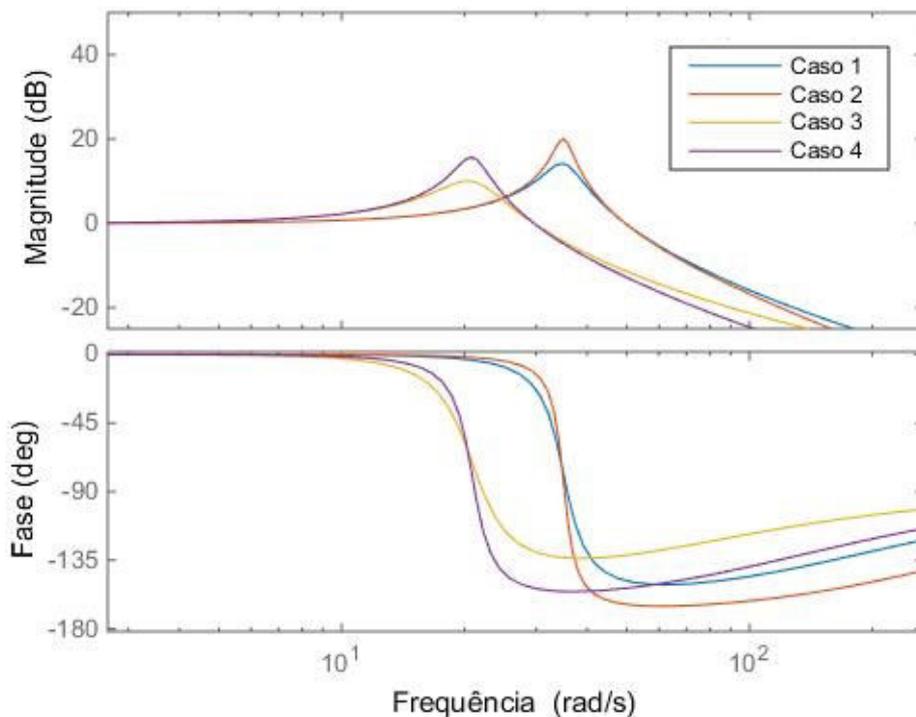


Figura 2 – Magnitude e fase da FRF

Então, obtemos o modelo para o sistema mecânico translacional. Caso a aplicação da excitação seja através de um motor elétrico, pode-se considerar as relações entre os componentes elétricos e assim interligar o domínios da elétrica e mecânica. Deste modo, a utilização de representações que integra estes diferentes ramos da ciência e da engenharia como a representação por grafos de ligação (KARNOPP; MARGOLIS; ROSENBERG, 2012) tornam-se ferramentas facilitadoras na modelagem. Esta, além da mecânica translacional, torna-se de maneira prática a modelagem de forma unificada a mecânica rotacional, sistemas elétricos, hidráulicos, térmicos e outros.

## 5 Problema inverso de estimação dos parâmetros do modelo

O problema inverso consiste em determinar as causas (desconhecidas) a partir da observação e medição de seus efeitos, no qual este pode aparecer de duas formas. A primeira forma se dá pelo *problema de reconstrução*, onde o sistema possui parâmetros conhecidos e, através da observação da resposta do sistema, encontra-se a sua correspondente entrada de excitação. Este problema é também conhecido como problema de reconstrução de fonte. A segunda forma, objetivo de estudo apresentado neste capítulo, é o *problema de identificação*, ou conhecido como problema de reconstrução de parâmetros, em que, conhecendo-se a entrada de excitação do sistema e também sua resposta, estima-se os parâmetros do modelo do sistema físico.

No capítulo 3, vimos que para sistemas estáveis excitados por senóides, o módulo da FRF do modelo  $|H(j\omega, \boldsymbol{\theta})|$  equivale a razão das amplitudes  $AR(\omega)$  da posição de entrada e de sua correspondente posição de resposta do sistema real após o sistema entrar em regime permanente. Assim, os parâmetros do modelo representados por  $\boldsymbol{\theta}$  são estimados pelas medições de  $AR(\omega)$ .

Neste capítulo estudaremos a estimação de parâmetros em distintos casos do problema de excitação de base, referente ao capítulo 4. Deste modo, na seção 5.1 os dados das medições de  $AR(w)$  são gerados. Na seção 5.2, a função custo é descrita assim como seu método de minimização, onde os resultados das estimações de parâmetros obtidos são apresentados na seção 5.3. Este é finalizado com as discussões dos resultados na seção 5.4.

### 5.1 Geração de dados

Os dados foram gerados pela resolução do problema direto, ou seja, pelo problema onde são conhecidos os dados de entrada e os parâmetros

Para isto, os parâmetros  $a$  e  $b$  do modelo da FRF do capítulo 4 foram previamente determinados. Assim, a Tabela 3 é construída para quatro casos distintos.

Tabela 3 – Parâmetros de referência

	$a$ [1/s <sup>2</sup> ]	$b$ [1/s]
Caso 1	1.225,888	7,002
Caso 2	1.225,888	3,501
Caso 3	437,817	7,002
Caso 4	437,817	3,501

Na geração de dados,  $N$  frequências  $\omega_i$  são estipuladas, em que  $\omega_{i+2} - \omega_{i+1} = \omega_{i+1} - \omega_i$  para  $i = 1, \dots, (N - 2)$ , isto é, equidistantes entre si. Assim, obtem-se seus  $N$  correspondentes módulos da FRF, os quais são adicionados um erro relativo aleatório com distribuição uniforme expresso pela variável aleatória  $\nu$ , sendo

$$AR^{ger}(\omega_i) = |H(j\omega_i)| \nu_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Adotou-se para os problemas estudados a variável aleatória  $\nu_i$ , para cada  $i$ , sendo

$$\nu_i \sim U[0, 7; 1, 3],$$

representando um número real obtido aleatoriamente em uma distribuição uniforme entre 0, 7 e 1, 3, que representa uma margem de erro de 30%. O algoritmo adotado no MATLAB<sup>®1</sup> para a geração de dados está presente no Anexo A.

## 5.2 Função Custo

A função custo adotada, segundo o método de mínimos quadrados, é

$$V(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N (AR^{ger}(\omega_i) - |H(j\omega_i, \boldsymbol{\theta})|)^2,$$

em que  $\boldsymbol{\theta} = (a, b)$  é o vetor de parâmetros a ser estimado,  $AR^{ger}(\omega_i)$  representam as razões das amplitudes geradas pelos respectivos  $\omega_i$  e  $|H(j\omega_i, \boldsymbol{\theta})|$  representam os valores da função dos parâmetros avaliada em  $\omega_i$  gerados.

A estimação dos parâmetros é formulada por um problema de minimização dado por

$$V(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \min_{\boldsymbol{\theta} \in I} V(\boldsymbol{\theta}),$$

sendo  $I$  o conjunto de busca viável para  $\boldsymbol{\theta}$ , e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  o vetor de parâmetros estimados que minimiza a função custo. Para a minimização da função no presente trabalho utilizou-se o método simplex com o uso da função *fminsearch* do MATLAB<sup>®</sup>, Anexo B.

## 5.3 Experimentos numéricos para estimação dos parâmetros

Os parâmetros foram estimados para os dados gerados dos casos da Tabela 3. Para cada experimento, vinte estimações de parâmetros foram realizadas através de vinte gerações distintas de  $N$  pares de dados, os quais serão abordados nas seguintes subseções.

A dispersão relativa dos parâmetros estimados é calculada pelo coeficiente de variação ( $CV$ ). Os  $CV$ 's representam os desvios padrão amostrais sobre a média amostral dos parâmetros estimados

$$CV = \frac{\text{desvio padrão amostral}}{\text{média amostral}}.$$

<sup>1</sup> MATLAB<sup>®</sup> (MATrix LABoratory) trata-se de um software interativo de alta performance.

### 5.3.1 Caso 1 com N=10

Para o caso 1, onde  $a = 1.225,888 \text{ 1/s}^2$  e  $b = 7,002 \text{ 1/s}$ , são estimados vinte pares de parâmetros,  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ , e cada qual realizado por distintos conjuntos de 10 pares de dados gerados. Os parâmetros estimados estão na Tabela 4 e representados graficamente na Figura 3. Os CV's dos parâmetros estimados  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são respectivamente 0,0411 e 0,1772.

Tabela 4 – Parâmetros estimados do caso 1 com N=10

Gerações	$\hat{a} \text{ [1/s}^2\text{]}$	$\hat{b} \text{ [1/s]}$
1	1246,8	8,6
2	1112,9	6,9
3	1134,3	7,8
4	1189,8	6,1
5	1147,2	7,3
6	1150,9	6,3
7	1284,8	6,7
8	1203,2	6,9
9	1256,2	10,3
10	1112,5	6,2
11	1175,1	7
12	1198,7	5,5
13	1186	5,3
14	1148,6	7
15	1211,4	7,1
16	1225,4	8,1
17	1238,5	8,7
18	1221,9	9,2
19	1269,2	7
20	1177,8	5,4

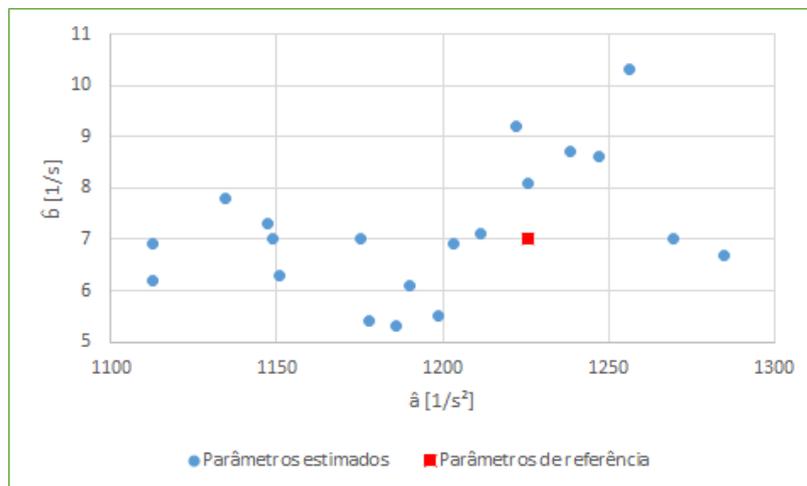


Figura 3 – Parâmetros estimados do caso 1 para N=10

As Figuras 4 e 5 mostram dois exemplos, nos quais representam a curva gerada pelo maior e o menor valor dos parâmetros estimados  $\hat{b}$ , respectivamente. As figuras contém os dados gerados, as funções módulo da FRF correspondentes aos parâmetros estimados (função estimada) e aos parâmetros utilizados na geração dos dados (função referência).

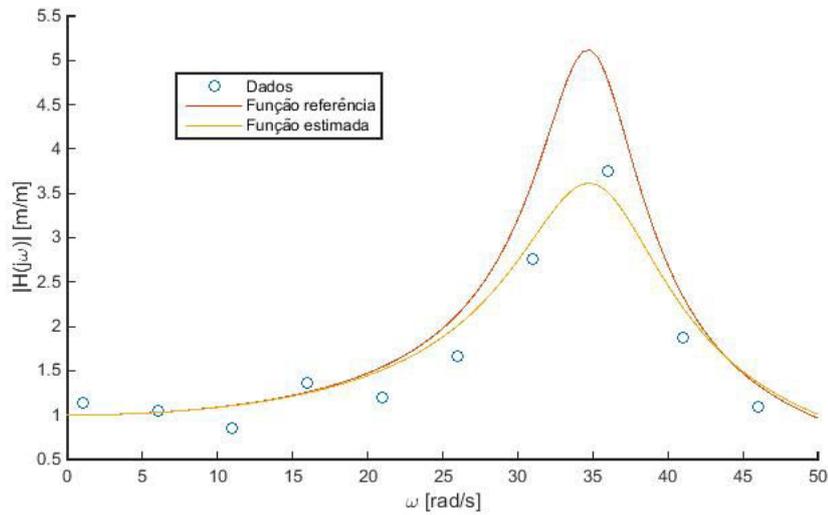


Figura 4 – Exemplo 1 do caso 1 para N=10

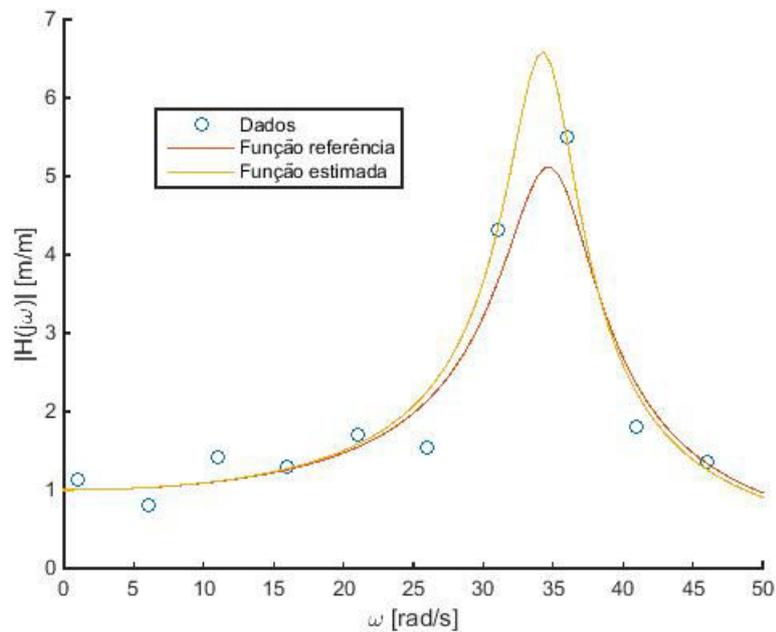


Figura 5 – Exemplo 2 do caso 1 para N=10

Na Figura 6 são graficadas todas as funções estimadas, assim como a função de referência em destaque por larga espessura.

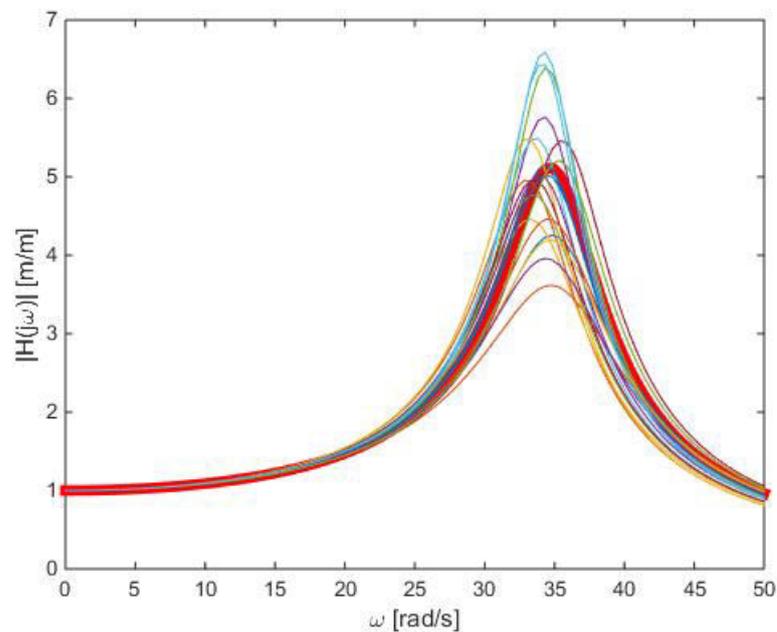


Figura 6 – Todas as funções estimadas do caso 1 para  $N=10$

### 5.3.2 Caso 1 com $N=100$

Ainda para a caso 1, realizando o mesmo procedimento, porém agora tomando  $N = 100$  temos os vinte parâmetros estimados na Tabela 5 distribuídos na Figura 7 Os  $CV$ 's dos parâmetros estimados  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são respectivamente 0,0159 e 0,0639.

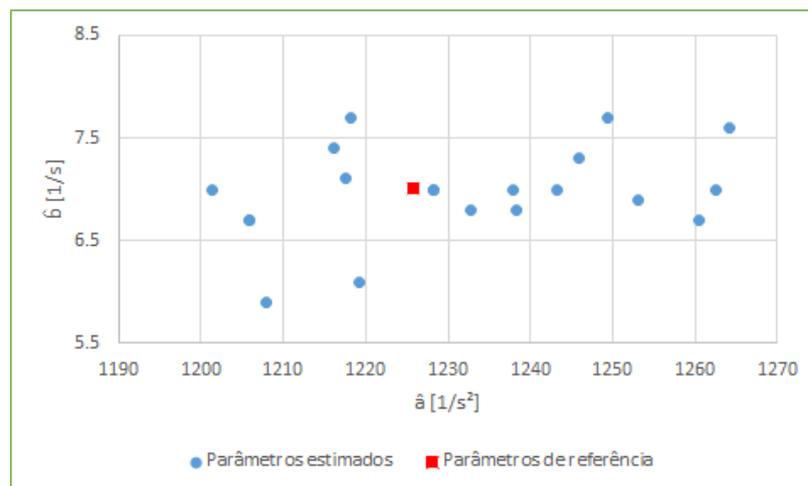


Figura 7 – Parâmetros estimados no caso 1 para  $N=100$

As Figuras 8 e 9 mostram também os dois exemplos, agora com  $N = 100$ , nos quais representam a curva gerada pelo maior e o menor valor dos parâmetros estimados  $\hat{b}$ , respectivamente. As figuras contém os dados gerados, as funções módulo da FRF

Tabela 5 – Parâmetros estimados do caso 1 com N=100

Gerações	$\hat{a}$ [ $1/s^2$ ]	$\hat{b}$ [ $1/s$ ]
1	1237,8	7
2	1243,3	7
3	1260,4	6,7
4	1218,2	7,7
5	1238,3	6,8
6	1207,9	5,9
7	1232,8	6,8
8	1228,2	7
9	1219,2	6,1
10	1253,1	6,9
11	1228,3	7
12	1249,4	7,7
13	1205,8	6,7
14	1262,6	7
15	1264,1	7,6
16	1205,8	6,7
17	1217,5	7,1
18	1201,4	7
19	1245,9	7,3
20	1216,2	7,4

correspondentes aos parâmetros estimados (função estimada) e aos parâmetros utilizados na geração dos dados (função referência).

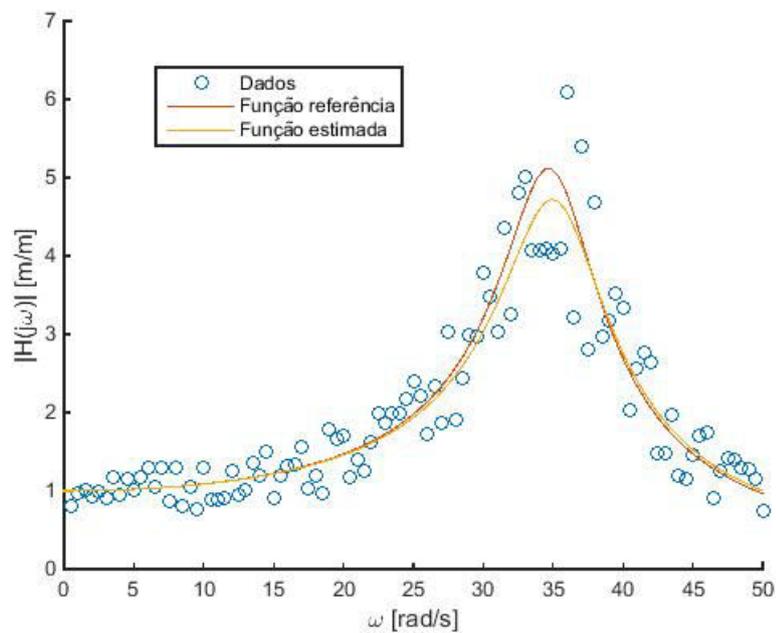


Figura 8 – Exemplo 1 do caso 1 para N=100

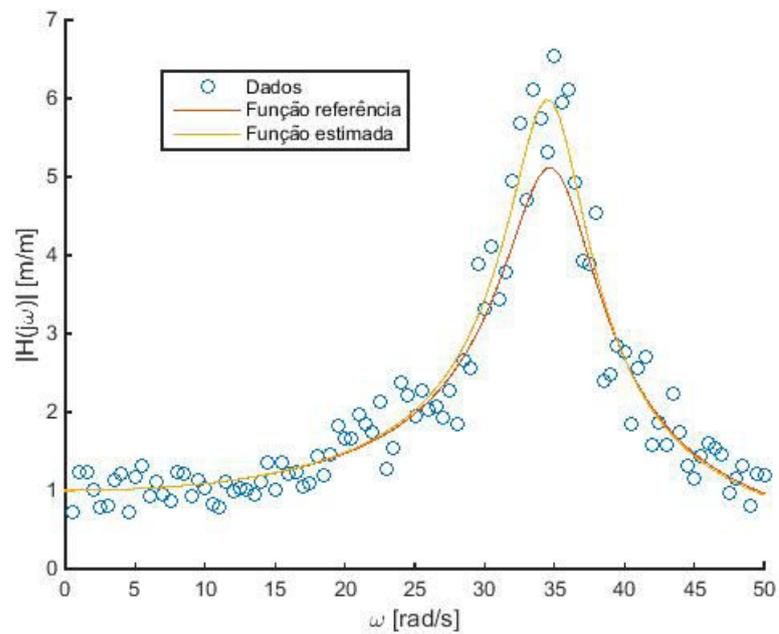


Figura 9 – Exemplo 2 do caso 1 para N=100

Na Figura 10 são graficadas todas as funções estimadas, assim como a função de referência em destaque por larga espessura. Na qual, observa-se melhor ajuste com a função de referência do que na subseção anterior.

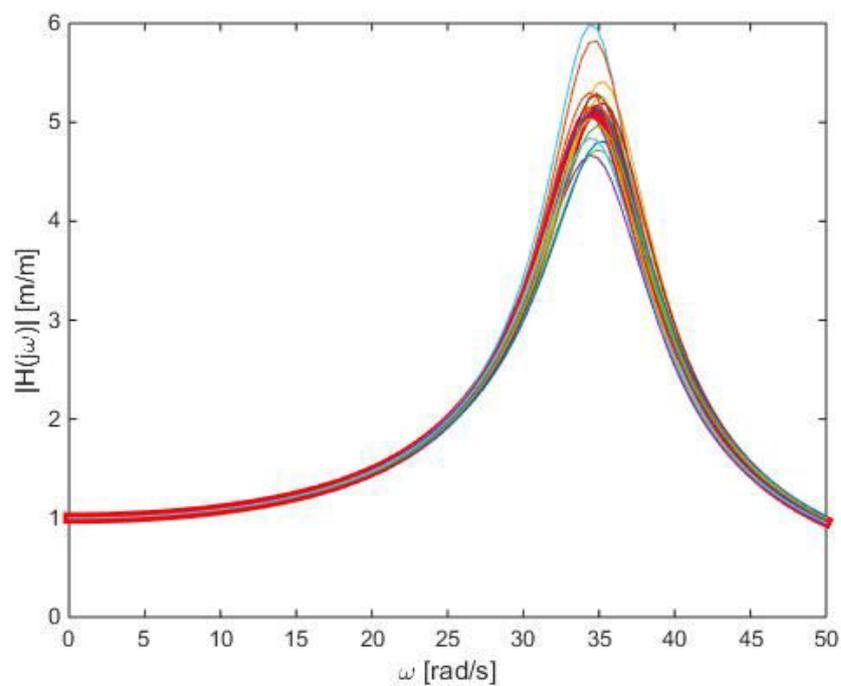


Figura 10 – Todas as funções estimadas do caso 1 para N=100

### 5.3.3 Caso 2 com N=10

Para o caso 2, foram utilizados  $a = 1.225, 888 \text{ 1/s}^2$  e  $b = 3, 501 \text{ 1/s}$  para a geração dos dados. Com os vinte conjuntos de dados gerados distintos, os vinte pares de parâmetros foram estimados, expressos na Figura 11. Os  $CV$ 's dos parâmetros estimados  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são respectivamente 0,0281 e 0,3139.

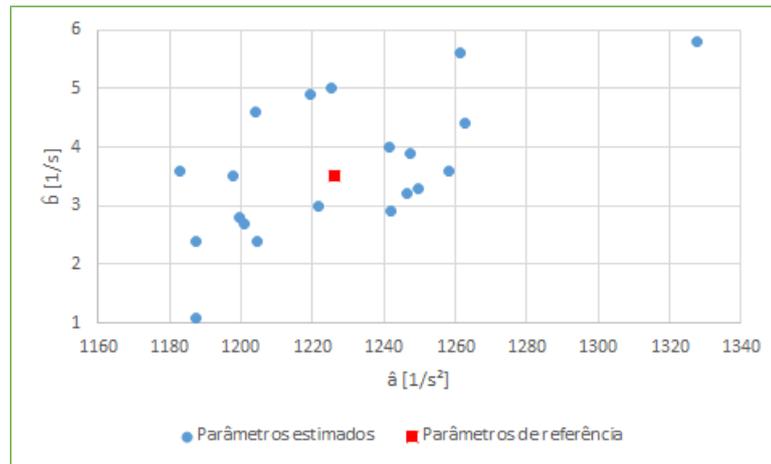


Figura 11 – Parâmetros estimados no caso 2 para N=10

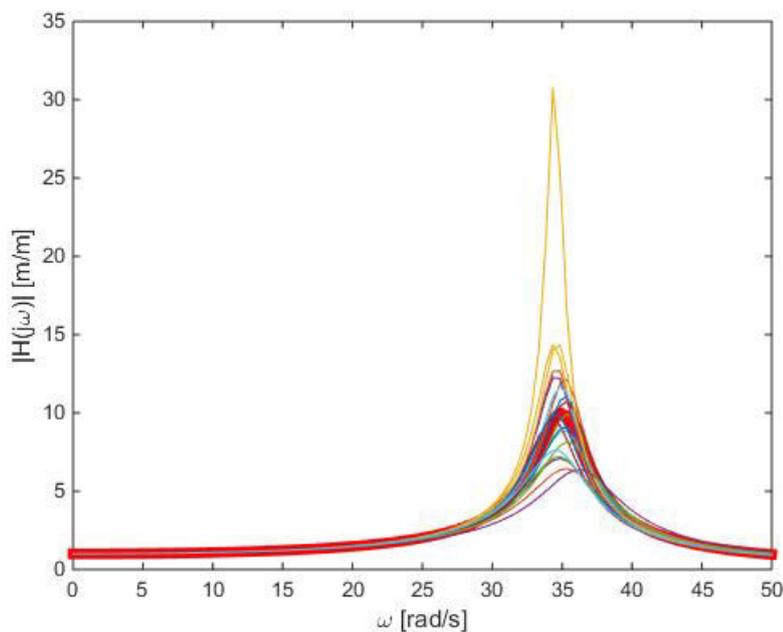


Figura 12 – Todas as funções estimadas do caso 2 para N=10

Ao esboçar todas as funções estimadas na Figura 12, observa-se um valor atípico, na qual seus dados e sua função estimada são mostradas na Figura 13. Com isto, vemos

uma necessidade de gerar uma maior quantidade de dados nas regiões de pico, que será tratada na subsecção 5.3.6.

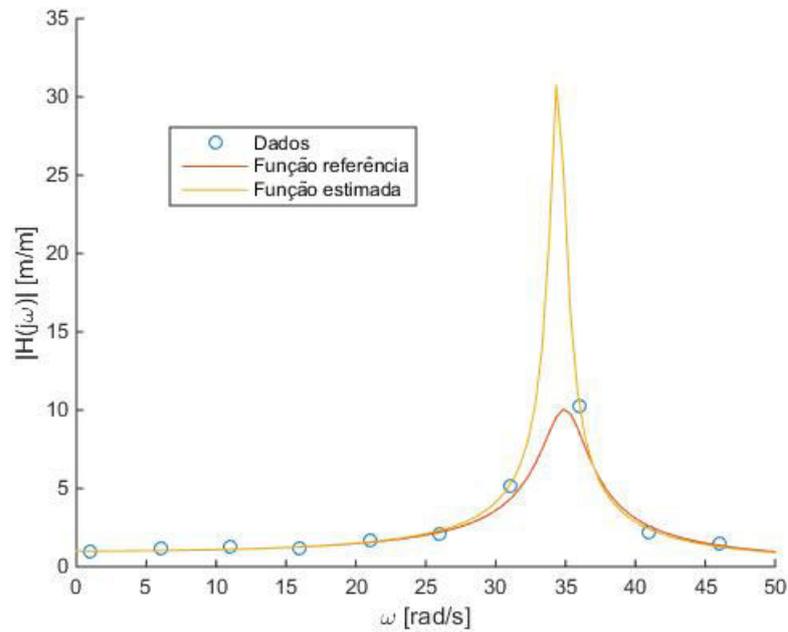


Figura 13 – Função e dados do valor atípico do caso 2 para  $N=10$

### 5.3.4 Caso 3 com $N=10$

Para o caso 3, foram utilizados  $a = 437,817 \text{ 1/s}^2$  e  $b = 7,002 \text{ 1/s}$  para a geração dos dados. Os vinte pares de parâmetros foram estimados, expressos na Figura 14. Os  $CV$ 's dos parâmetros estimados  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são respectivamente 0,0786 e 0,2568.

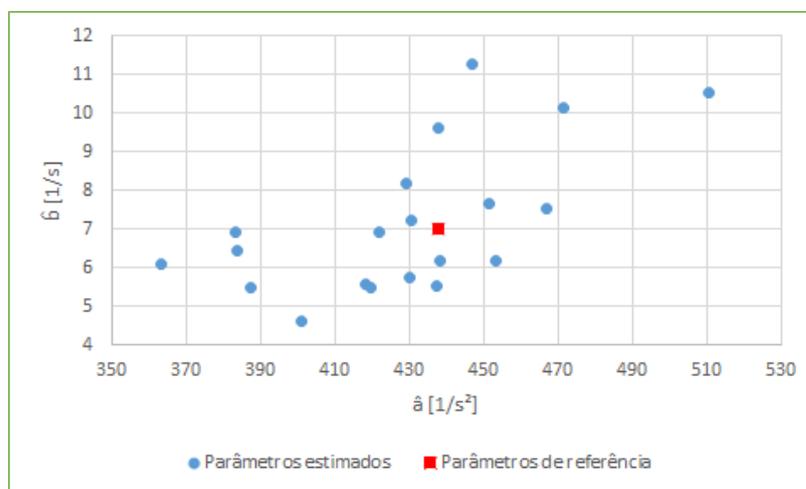


Figura 14 – Parâmetros estimados no caso 3 para  $N=10$

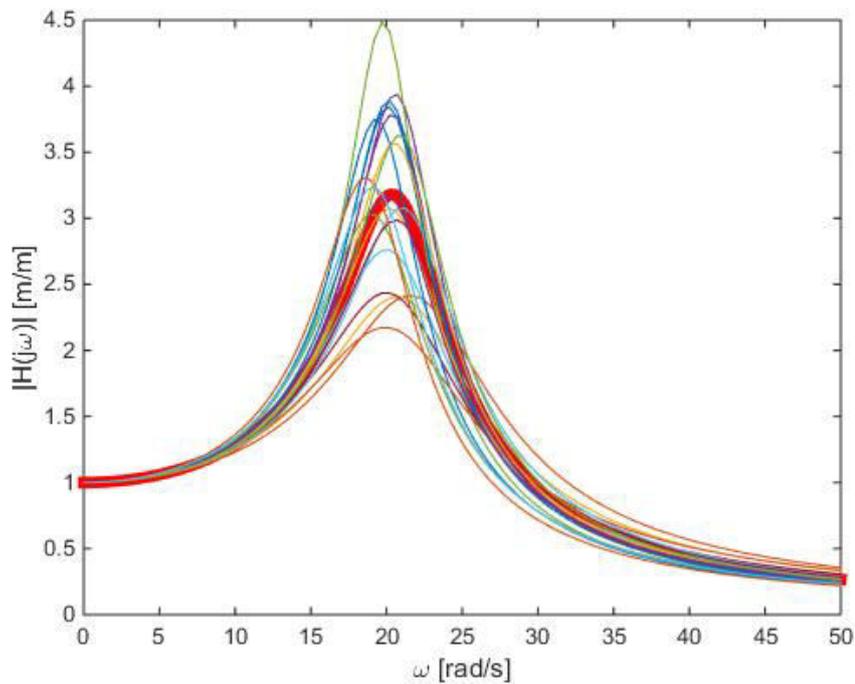


Figura 15 – Todas as funções estimadas do caso 3 para  $N=10$

Na Figura 15 são graficadas as funções estimadas, onde apresentam um razoável ajunte.

### 5.3.5 Caso 4 com $N=10$

Para o caso 4, foram utilizados  $a = 437,817 \text{ 1/s}^2$  e  $b = 3,501 \text{ 1/s}$  para a geração dos dados. Os vinte pares de parâmetros foram estimados, expressos na Figura 16. Os  $CV$ 's dos parâmetros estimados  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são respectivamente 0,0558 e 0,2407.

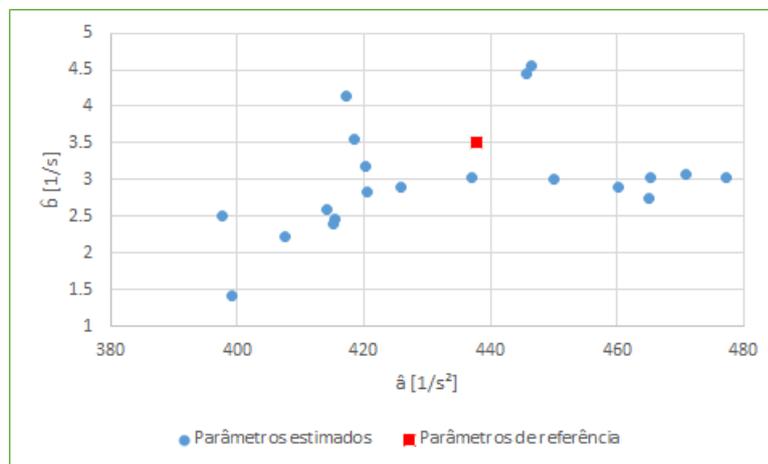


Figura 16 – Parâmetros estimados no caso 4 para  $N=10$

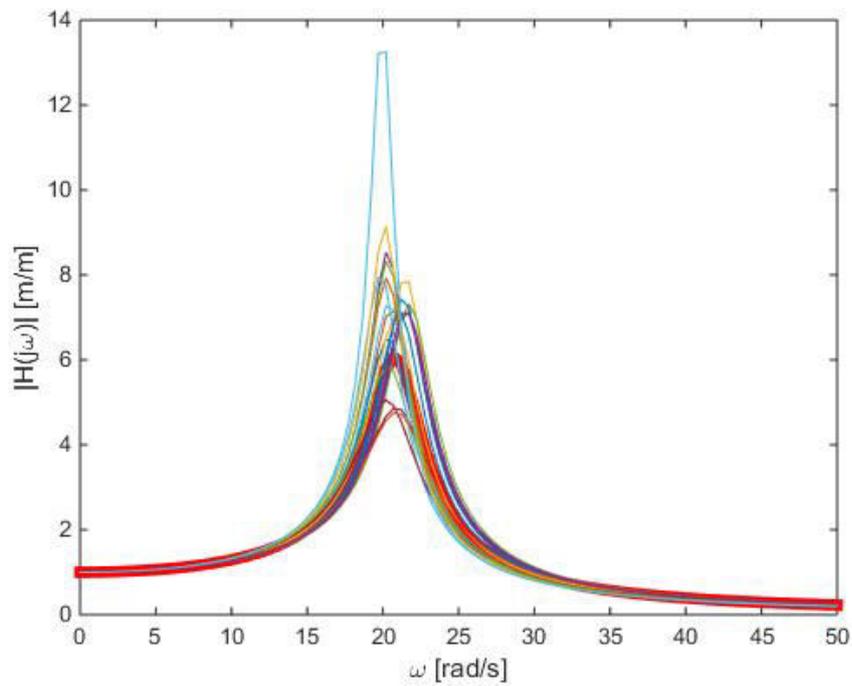
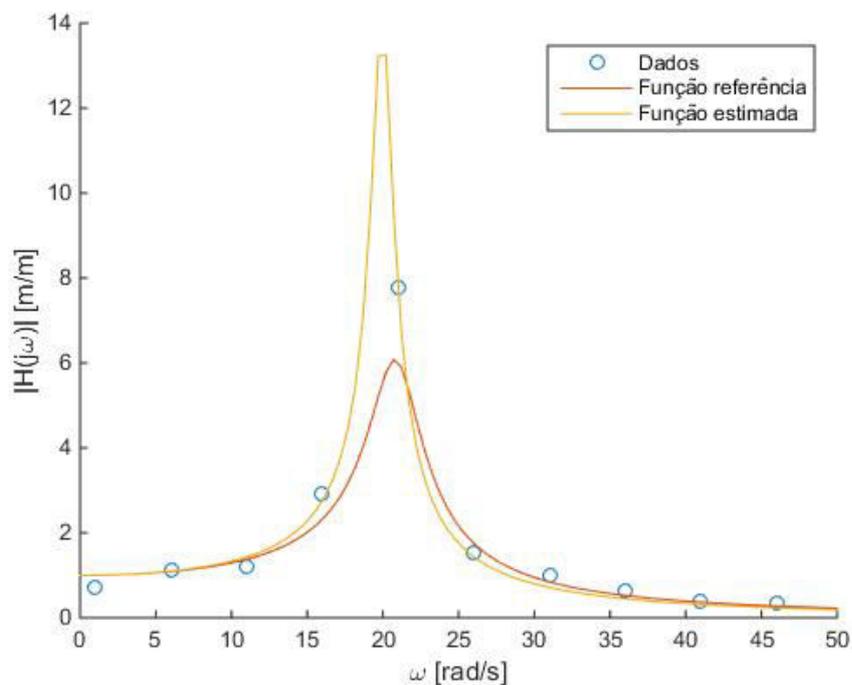


Figura 17 – Todas as funções estimadas do caso 4 para N=10

Ao graficar todas as funções estimadas, na Figura 17, observa-se também um valor atípico, na qual seus dados e sua função estimada são mostradas na Figura 18.

Figura 18 – Função e dados do valor atípico do caso 4 para N=10



### 5.3.6 Caso 2 com $N=10$ e dados concentrados

Para obter uma estimação de parâmetros mais precisa, de modo a evitar a ocorrência de valores atípicos, é requerida uma maior concentração de pontos nas regiões de maiores taxas de variação.

Foi realizado o experimento da subseção 5.3.3 de maneira distinta, em que são gerados 6 pares de dados e encontrado o par que possui o máximo valor do módulo da FRF. Então, é gerado dos outros 4 pares próximos a este, concentrando-os nesta região. O algoritmo em MATLAB<sup>®</sup> utilizado encontra-se no Anexo C.

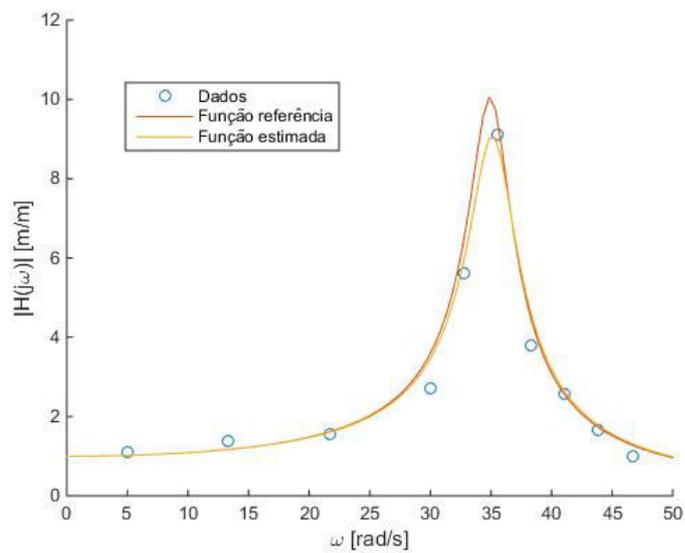


Figura 19 – Exemplo do caso 2 para  $N=10$  com concentração

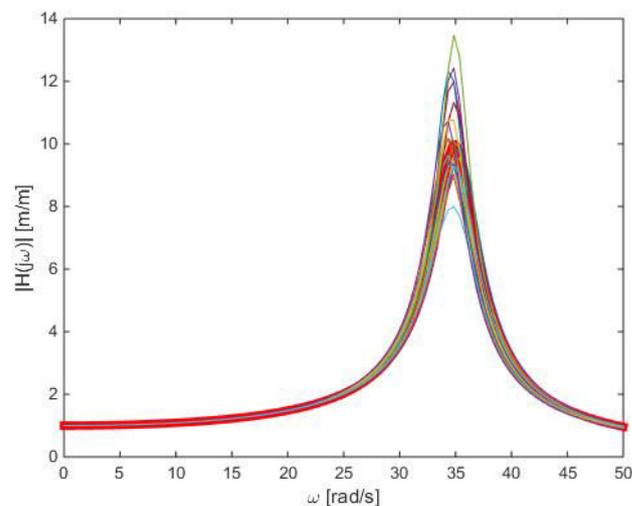


Figura 20 – Todas as funções estimadas do caso 2 para  $N=10$  com dados concentrados

Para este experimento, os  $CV$ 's dos parâmetros estimados  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são respectivamente 0,0192 e 0,1262. Eliminando os valores atípicos e melhorando consideravelmente a precisão das estimativas.

## 5.4 Discussão de resultados

Com base nos resultados obtidos podemos inferir sobre a influência na estimação de parâmetros pelo número de dados medidos, a influência dos valores distintos dos parâmetros no problema de excitação de base e a influência da concentração dos dados medidos no pico. Deste modo, esta seção é organizada em três subseções.

### 5.4.1 Número de dados medidos

Considerando um mesmo caso, isto é, o mesmo sistema analisado, a influência da quantidade de medidas necessárias para a estimação dos parâmetros são descritas pela comparação das subseções 5.3.1 e 5.3.2.

Os vinte parâmetros estimados com  $N = 10$  medidas e os vinte parâmetros estimados com  $N = 100$  medidas dos experimentos são esboçados na Figura 21.

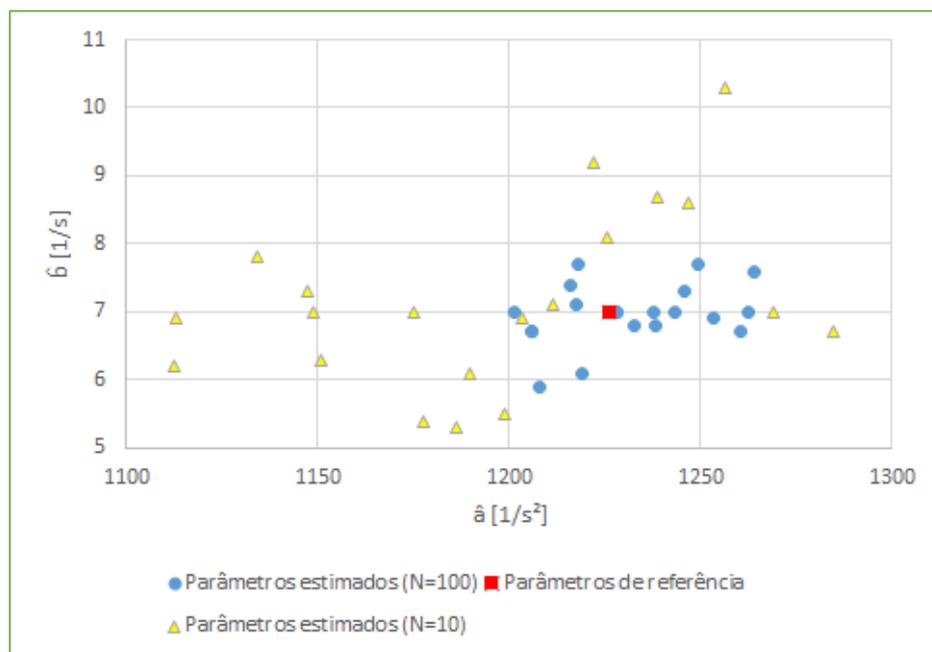


Figura 21 – Estimativas do caso 1 com  $N=10$  e  $N=100$

Os coeficientes de variação em porcentagem dos parâmetros estimados foram  $CV_a = 4,11\%$  e  $CV_b = 17,72\%$  para  $N = 10$  e  $CV_a = 1,59\%$  e  $CV_b = 6,39\%$  para  $N = 100$ . Logo, a precisão das estimativas foi aproximadamente 2,58 vezes maior no parâmetro  $\hat{a}$  e 2,77 vezes maior no parâmetro  $\hat{b}$  com o aumento do número de dados medidos.

### 5.4.2 Parâmetros distintos

Os parâmetros do sistema são os valores que identificam uma coleção de distintos casos em um problema. O comportamento do módulo da FRF é determinado pelos parâmetros  $a$  e  $b$ , então podemos analisar através dos experimentos das subseções 5.3.1, 5.3.3, 5.3.4 e 5.3.5 a influência do formato da função módulo da FRF na estimação dos parâmetros.

Para a visualização do comportamento da função em função dos parâmetros no modelo, os padrões das funções de referência utilizadas na geração de dados são esboçados na Figura 22. Além disso, na figura são esboçadas as localizações das frequências utilizadas na geração dos dados para os experimentos das subseções 5.3.1, 5.3.3, 5.3.4 e 5.3.5.

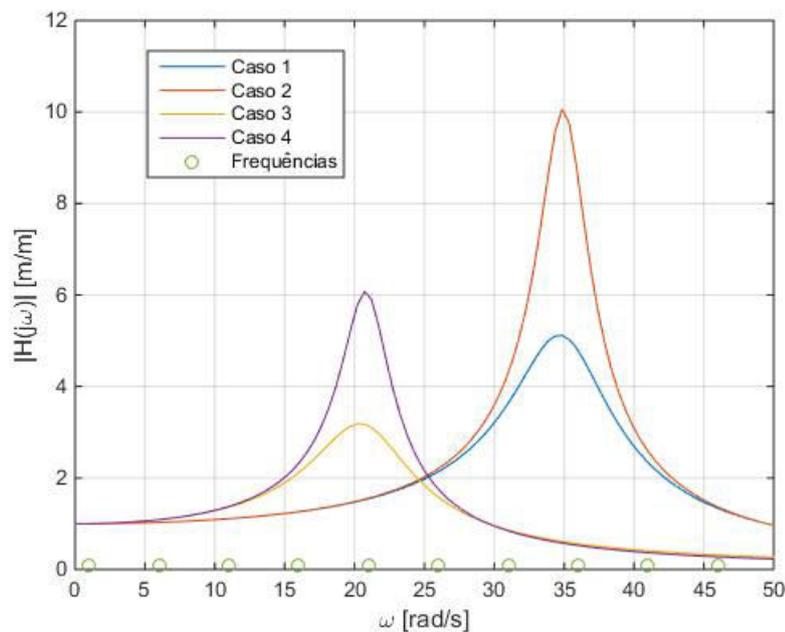


Figura 22 – Módulos das FRF para os casos 1, 2, 3 e 4 em função da frequência

A estimação dos parâmetros realizadas sobre os dados gerados são apresentadas na Figura 23. E a partir de suas estimativas foram calculados seus coeficientes de variação apresentados da Tabela 6.

Tabela 6 – Coeficientes de variação

Casos	$a$	$b$	$CV_a$	$CV_b$
1	1225,888	7,002	4,11	17,72
2	1225,888	3,501	2,81	31,39
3	437,817	7,002	7,86	25,68
4	437,817	3,501	5,58	24,07

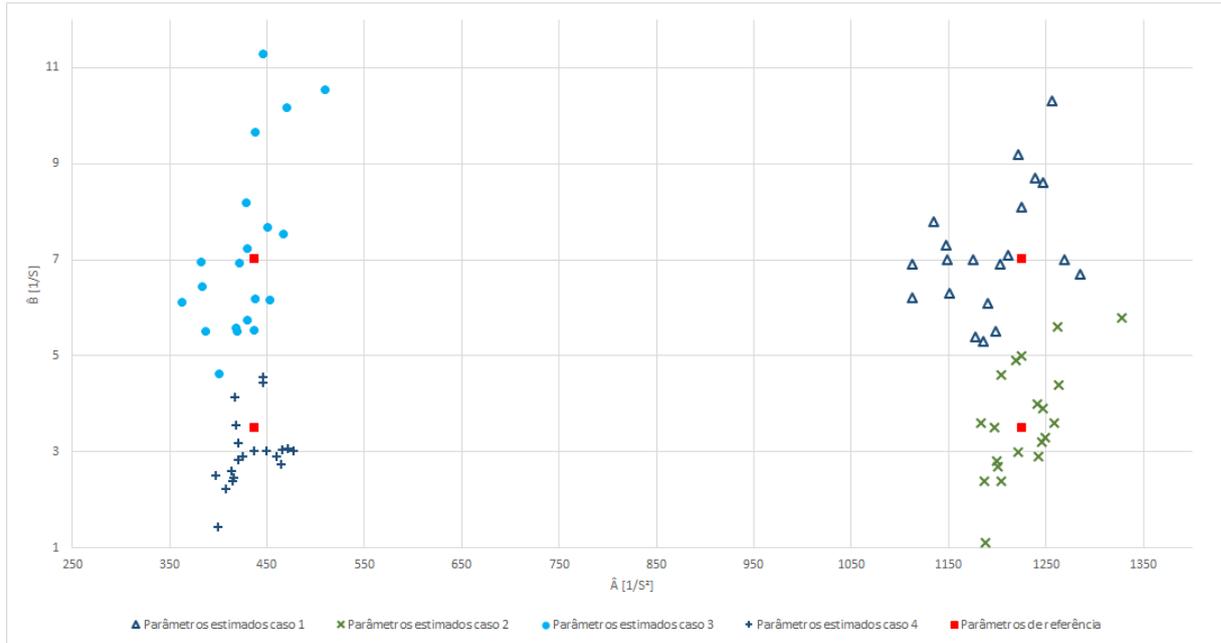


Figura 23 – Estimativas dos parâmetros dos casos 1, 2, 3 e 4 com  $N=10$

Logo, os  $CV$ 's estão relacionados a intensidade do pico de ressonância obtida pela relação entre  $a$  e  $b$ , parâmetros do sistema.

### 5.4.3 Concentração de dados em determinada região

A elaboração de medidas concentradas nas regiões que possuem um alto índice de variação resultam na melhor estimativa dos parâmetros. Comparando as subseções 5.3.3 e 5.3.6, os coeficientes de variação em porcentagem dos parâmetros estimados foram de 2.8% para 1, 9% para o parâmetro  $\hat{a}$  e de 31.4% para 12, 6% para o parâmetro  $\hat{b}$ . Logo, a precisão na estimativa dos parâmetros foi de aproximadamente 1,47 vezes maior no parâmetro  $\hat{a}$  e 2,49 vezes maior no parâmetro  $\hat{b}$  com a concentração dos parâmetros. Esta equivale ao aumento da precisão das estimativas do parâmetro  $\hat{b}$  pelo aumento do número de dados medidos de 10 para 100 dados.



## 6 Conclusão e trabalhos futuros

A proposta de estimação de parâmetros do modelo de um sistema dinâmicos no domínio de frequência foi estudada atingindo o objetivo do trabalho com a realização de experimentos numéricos para visualização do procedimento.

A modelagem, descrita neste trabalho, determina o comportamento de sistemas representados pelo problema de excitação de base utilizando estimação de seus parâmetros através da realização de experimentos no domínio da frequência. Com este procedimento, obtém-se então representações matemáticas que aproximam-se do comportamento exato do sistema, em que são amplamente utilizados na área de controle dinâmico.

No processo de estimação no domínio da frequência, através da análise comparativa dos resultados dos experimentos numéricos, foram observadas as influências dos dados a serem medidos. Assim, as medições, realizadas independentemente por experimentos no domínio da frequência, podem ter seu número reduzido sendo estas corretamente localizadas no gráfico da FRF.

Para trabalhos futuros, consideram-se a implementação experimental prática do processo de estimação dos parâmetros por um motor elétrico como fonte de excitação, em que este pode ser incorporado ou não ao modelo do sistema, e o aprimoramento das análises estatísticas.

Além disso, destacam-se como trabalhos futuros o estudo de relações não lineares e a utilização de outros tipos de sinais de entrada.



# Referências

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. Citado na página 30.
- CEZARO, A. D. *Problema Inversos: Uma Introdução*. Universidade Federal do Rio Grande: SBM. Disponível em: <<http://sbm.org.br/docs/coloquios/SU-1.06.pdf>>. Acesso em: 25 nov. 2016. Nenhuma citação no texto.
- CHERMAN, A. *Sobre os ombros de gigantes: uma história da física*. 2<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2005. Citado na página 23.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentals of Physics*. 9th. ed. New Jersey: Wiley, 2010. Citado na página 23.
- HIBBELER, R. C. *Dynamics: Engineering Mechanics*. 12th. ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2010. Nenhuma citação no texto.
- INMAN, D. J. *Engineering Vibration*. 4th. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 38.
- KARNOPP, D. C.; MARGOLIS, D. L.; ROSENBERG, R. C. *System Dynamics: Modeling, Simulation, and Control of Mechatronic Systems*. 5th. ed. New York: John Wiley and Sons, Inc., 2012. Citado na página 40.
- KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*. 10th. ed. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc., 2011. Citado na página 30.
- MARGHITU, D. B.; DUPAC, M. *Advanced Dynamics: Analytical and Numerical Calculations with MATLAB*. 1st. ed. New York: Springer, 2012. Citado na página 23.
- NISE, N. S. *Control Systems Engineering*. 6th. ed. New Jersey: John Wiley and Sons, 2011. Nenhuma citação no texto.
- NORTON, R. L. *Machine Design An Integrated Approach*. 5th. ed. New Jersey: Person Education, 2014. Citado na página 38.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Mecânica*. 4<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2002. Citado na página 23.
- TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D. H. *Advanced Dynamics*. 1st. ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1948. Citado na página 23.



# Anexos



## ANEXO A – Algoritmo de geração de dados

```

clear;
clc;
wmax=50;      %frequencia maxima
n= 10;       %numero de dados
p= wmax/n;   %passo
int1=-0.3;   %fracao de erro inferior da funcao
int2=0.3;    %fracao de erro superior da funcao
aid= 437.817; %parametros ideias
bid=3.501;   %parametros ideais
cont1 = 1;   %contador
for w=1:p:wmax
wr = w;
freq(cont1) = wr;
mod(cont1)= ((( aid^2)+(bid^2)*(wr^2))/(( aid -(wr^2))^2
+ (bid^2)*(wr^2)))^(1/2);
cont1=cont1+1;
end

cont2= 1;
for w=0.5:p:wmax
e1=random('Uniform', int1, int2);
mod(cont2)=mod(cont2) + mod(cont2)*e1;
cont2=cont2 + 1;
end

scatter(freq, mod, 30);
hold on;

x=linspace(0,wmax);
mod_ideal= ((( aid^2)+(bid^2)*(x.^2))/(( aid -(x.^2))^2
+ (bid^2)*(x.^2)))^(1/2);
plot(x, mod_ideal);

```

Tempo médio de execução foi de 0,05 segundos.



## ANEXO B – Algoritmo de estimação dos parâmetros

```

clear;
clc;
%chute inicial
a= 600;
b= 5;
p0 = [a b];
options = optimset('PlotFcns', @optimplotfval);
p = fminsearch(V, p0, options)

function V=erro_quad(p)
%Parametros do modelo
a=p(1);
b=p(2);
%Dados obtidos
%Instante inicial
x1= [5 13.33333333 21.66666667 30 32.77777778 35.55555556 38.33333333
41.11111111 43.88888889 46.66666667];
x=transpose(x1);
%Coluna variacao da saida
y1=[0.799628286 1.307003208 1.221858569 3.648223718 6.419351229
8.856017902 4.515414877 2.800758458 1.972542983 1.557974773];
y = transpose(y1);
%Calcula a resposta esperada
y_esp = modelo(x, a, b);
%Calcula o erro quadratico medio
erro = y - y_esp;
V= mean(erro.^2);

function y_esp = modelo(x, a, b )
M = length(x);
y_esp = zeros(M, 1);
for k=1:M,
var_x = x(k);

```

```
if (var_x>0),  
y_esp(k) = (((a^2)+(b^2)*(var_x^2))/((var_x^4)+ ((b^2) - 2*a)*(var_x^2)  
+ (a^2)))^(1/2);  
else  
y_esp(k)=0;  
end  
end
```

Tempo médio de execução foi de 0,01 segundos.

## ANEXO C – Algoritmo de geração para os dados concentrados no pico

```

clear ;
clc ;
wmax=50;          %frequencia maxima
n= 6;             %numero de dados
p= wmax/n;       %passo
int1=-0.3;       %fracao de erro inferior da funcao
int2=0.3;        %fracao de erro superior da funcao
aid= 1225.888;   %parametros ideias
bid=3.501;       %parametros ideais
cont1 = 1;
for w=5:p:wmax
wr = w;
freq(cont1) = wr;
mod(cont1)= ((( aid^2)+(bid^2)*(wr^2)))/((( aid-(wr^2))^2 +
(bid^2)*(wr^2)))^(1/2);
cont1=cont1+1;
end

modpico=0;
wpico=0;
cont2= 1;
for w=5:p:wmax
e1=random('Uniform', int1, int2);
mod(cont2)=mod(cont2) + mod(cont2)*e1;
if mod(cont2)>modpico
modpico=mod(cont2);
wpico=freq(cont2);
wpicoa=wpico-p;
wpicod=wpico+p;
end
cont2=cont2 + 1;
end

```

```

div=4;
wrel=(wpicod - wpicoa)/(div+2);

for w=(wpicoa+wrel):wrel:(wpico-wrel)
e1=random('Uniform', int1, int2);
mod(cont2)= (((aid^2)+(bid^2)*(w^2))/((aid-(w^2))^2 +
(bid^2)*(w^2)))^(1/2);
mod(cont2)= mod(cont2) + mod(cont2)*e1;
freq(cont2)=w;
cont2=cont2+1;
end

for w=(wpico+wrel):wrel:(wpicod-wrel)
e1=random('Uniform', int1, int2);
mod(cont2)= (((aid^2)+(bid^2)*(w^2))/((aid-(w^2))^2 +
(bid^2)*(w^2)))^(1/2);
mod(cont2)= mod(cont2) + mod(cont2)*e2;
freq(cont2)=w;
cont2=cont2+1;
end

scatter(freq, mod, 30);
hold on;
x=linspace(0,wmax);
mod_ideal= (((aid^2)+(bid^2)*(x.^2))./((aid-(x.^2)).^2 +
(bid^2)*(x.^2))).^(1/2);
plot(x, mod_ideal);
grid on;

```

Tempo médio de execução foi de 0,05 segundos.